ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
[55-64] *Cuadernos de filosofía* /62 .2014

El modelo estándar de la aritmética: recursividad y lógica de primer orden

Bruno Da Ré
Universidad de Buenos Aires - CONICET

Introducción

En este trabajo, argumentaré a favor de la posibilidad de capturar el modelo estándar de la aritmética, utilizando la lógica clásica de primer orden como lógica subyacente. Como es sabido, las teorías aritméticas formuladas en un lenguaje de primer orden poseen modelos que, si bien satisfacen sus oraciones, difieren estructuralmente del modelo estándar. A estos modelos se los denomina modelos no estándar de la aritmética y deberemos lidiar con ellos a los fines de diferenciarlos del modelo estándar. En esta tarea, el concepto de recursividad, en el plano técnico, y computabilidad, en el plano filosófico, constituyen la clave de la propuesta que sostendré aquí. En este sentido, luego de algunas precisiones introductorias, defenderé la línea argumentativa iniciada por Halbach y Horsten (2005) y discutiré la tesis, sostenida entre otros por Shapiro (1991) y por Barrio (en este volumen), que propugna la necesidad de usar lógica de segundo orden.

1. Teorías aritméticas y modelo estándar de la aritmética

Una teoría aritmética de primer orden consiste en un conjunto de oraciones formuladas en el lenguaje de la aritmética, al que llamaremos LA, cerrado bajo consecuencia lógica. Este lenguaje, a su vez, está compuesto por dos constantes no lógicas (**0** y **1**), una relación (<) y dos funciones (+ y .). La teoría aritmética más célebre es la conocida como *aritmética de Peano* (que abreviaremos PA). PA es una teoría recursivamente axiomatizable, es decir, PA es el conjunto de todas las oraciones que resultan ser consecuencia de un subconjunto finito de ellas (axiomas), junto con un esquema de axioma (conocido como *axioma de inducción*). La lógica subyacente usualmente empleada para trabajar con PA es la clásica de primer orden. Cuando se presenta una teoría formalizada, en rigor, la caracterización es meramente sintáctica. Si queremos interpretar una teoría formal, darle un significado, debemos explicitar un conjunto de objetos (dominio de la interpretación) y asignar a los símbolos no lógicos de esta un elemento o un subconjunto del dominio mencionado, en este caso, según se trate de una constante de individuo, una relación o una función. Cuando al realizar esta asignación logramos que los axiomas sean verdaderos en esa interpretación, decimos que dicha interpretación es un modelo de la teoría. Al dar con un modelo estamos brindándole significado a la teoría, es decir, podemos sostener que la teoría habla acerca de los objetos, relaciones y funciones interpretados por el modelo.

Entonces, el significado o interpretación de una teoría se ofrece a través de sus modelos, es decir, la colección de estructuras que hacen verdaderos a los axiomas. Entre todas las estructuras posibles, desde un punto de vista conceptual, el modelo estándar de la aritmética cumple un rol destacado. Esta interpretación de los símbolos no lógicos del lenguaje de la aritmética define como dominio de interpretación al conjunto de los números naturales y la función de interpretación se define del modo pretendido: asigna al símbolo **0** el número 0, al símbolo **1**, el número 1 y la relación y las funciones son interpretadas del modo en que se interpretan la relación de orden y la función suma y producto entre números naturales de la manera usual. Esta manera de interpretar los símbolos no lógicos de LA produce que los axiomas de PA sean interpretados como si se hiciesen afirmaciones acerca de los números naturales.

Una de las limitaciones de esta aproximación es que, en rigor, no es posible diferenciar desde el punto de vista técnico dos modelos isomórficos. Por esta razón, tomaremos como modelo estándar de la aritmética a toda interpretación isomórfica a la que le asigna de manera pretendida las extensiones de los símbolos de LA.

A su vez, como se ha mencionado, un modelo es una estructura que consiste en un dominio de interpretación y una función de interpretación. Sin embargo, una teoría axiomatizable como PA, debido a las limitaciones derivadas por los teoremas de Gödel, no posee la fuerza expresiva para poder probar todas las oraciones *intuitivamente* verdaderas (las oraciones que hacen verdaderas el modelo estándar). Por esta razón, definiremos la teoría *aritmética verdadera* (TA) como la teoría no recursivamente axiomatizable que consiste en el conjunto de todas las oraciones verdaderas en el modelo estándar de la aritmética.

Así, en general, es necesario distinguir estas dos teorías (aritmética de Peano y aritmética verdadera) ya que, a pesar de que el modelo estándar es modelo de ambas, poseen características y propiedades técnicas disímiles. En este contexto, solo es necesario dar cuenta de esta distinción sin profundizar en los detalles del caso.

2. Modelos no estándar de la aritmética e interpretación de los símbolos no lógicos del LA

Una de las consecuencias de adoptar la lógica de primer orden como lógica subyacente para formular una teoría aritmética es que, entre otras cosas, debido a que rige el metateorema de Löwenheim-Skolem en su versión ascendente, dado cualquier conjunto de oraciones, si dicho conjunto tiene un modelo infinito, entonces tiene infinitos modelos no isomórficos entre sí (de distintas cardinalidades). Esta es una de las razones por la que muchos lógicos han descartado a esta lógica como idónea para capturar el modelo estándar de la aritmética. Esto es, dado que las teorías aritméticas tienen un modelo y que, además, el modelo estándar es un modelo de estas teorías, entonces existen infinitos modelos no isomórficos al modelo estándar que interpretan a la teoría, que difieren estructuralmente de la interpretación pretendida. A los modelos no isomórficos al modelo estándar se los conoce como *modelos no estándar*. Estos pueden diferir del modelo estándar en las relaciones entre los objetos que forman parte del dominio de interpretación y/o en la cardinalidad de dicho conjunto. Sin embargo, entre los modelos no estándar de la aritmética existe una subcolección de estructuras que se caracteriza por tener exactamente la misma cardinalidad que el modelo estándar de la aritmética, pero que difiere de él sólo en la interpretación asignada a los símbolos no lógicos del lenguaje. En este trabajo, únicamente nos enfocaremos en este tipo de modelos.

Si bien en este contexto la existencia de modelos no estándar puede ser vista como una limitación de la lógica de primer orden, es pertinente destacar que las propiedades de dichas estructuras permiten obtener resultados interesantes respecto de las teorías aritméticas (ver Kaye [1991]). En este sentido, es necesario notar que el estudio de los modelos no estándar de la aritmética configura un campo de estudio en sí mismo, relevante para la investigación en teorías aritméticas.

Por otro lado, la interpretación pretendida del lenguaje de la aritmética (la aritmética *informal*) es identificada con el modelo estándar de PA (la aritmética *formal*). Entonces, en este contexto, capturar la aritmética intuitiva mediante la teoría formal PA significa restringir la clase de los modelos de esta teoría, es decir, hallar un mecanismo que nos permita seleccionar unívocamente al modelo estándar de la aritmética. Por esta razón nos ceñiremos a mostrar de qué manera se puede trazar una línea demarcatoria entre modelos no estándar y el modelo estándar.

Las constantes no lógicas del lenguaje de la aritmética consisten en símbolos como *0, 1, 2,* etc. Al interpretar los símbolos no lógicos, asignamos un elemento del dominio a cada una de estas constantes. De igual forma, al interpretar las operaciones del lenguaje, asignamos subconjuntos del dominio para los predicados unarios, subconjuntos del producto cartesiano del dominio para las relaciones binarias, etc. En este sentido, como los símbolos + y . consisten en símbolos no lógicos del lenguaje, al ser interpretados seleccionan conjuntos. Dichos conjuntos difieren de interpretación en interpretación. Tennenbaum (1959) probó un célebre resultado que afirma que si tomamos un modelo no estándar, las funciones de suma y producto no pueden ser recursivas. Es decir, los conjuntos que seleccionan las interpretaciones no estándar resultan ser no recursivos. Por el contrario, el modelo estándar de la aritmética interpreta las operaciones de suma y producto de forma tal que los conjuntos seleccionados son recursivos. Entonces, lo que caracteriza al modelo estándar de la aritmética, unívocamente, es la recursividad en la interpretación de los símbolos no lógicos mencionados. Este resultado nos provee de un criterio formal para seleccionar al modelo estándar de la aritmética: imponemos una restricción a las interpretaciones de los modelos y logramos demarcar los modelos no estándar del modelo estándar. Sin embargo, al existir otros criterios formales para distinguir al modelo estándar de la aritmética, optar por la recursividad en particular podría parecer una apelación *ad hoc.* Por esta razón, en lo que sigue intentaré mostrar que existe una imbricación conceptual entre la noción de computabilidad y la de aritmética que justifica esta elección.

3. Aritmética intuitiva y aritmética formal: computabilidad y recursividad

Cuando emprendemos la tarea de caracterizar el modelo estándar de la aritmética es necesario tener en mente que nuestra motivación fundamental es dar con el correlato formal, capturar aquello que usualmente hacemos en nuestra vida cotidiana cuando hacemos aritmética. En tanto seres humanos, sumamos, ponemos números en orden, contamos. No es condición necesaria ser un profesional de la matemática para poder cumplimentar estas actividades con éxito. Entonces, lo que debe ser tenido en cuenta como pregunta que guía nuestra investigación es: ¿qué hacemos cuando hacemos aritmética? Esta pregunta puede ser pensada desde diversas perspectivas. Aquí no nos enfocaremos en el aspecto psicologista de la pregunta, sino en su aspecto conceptual. Analizando nuestra práctica, llegamos a la conclusión de que eso que hacemos cuando hacemos aritmética contiene una marca distintiva: es un procedimiento mecánico, sin creatividad, algorítmico.

Si una de las características intrínsecas de aquello que queremos capturar es la de ser un procedimiento algorítmico, entonces nuestra teoría formal debería poder representar esta propiedad en el plano técnico. Sin embargo, ¿qué es un algoritmo? Las características esenciales de un algoritmo son las siguientes:

> 1) An algorithm is given as a set of instruction of finite size (...)
>
> 2) There is a computing agent, usually human, which can react to the instructions and carry out the computations.
>
> 3) There are facilities for making, storing and retrieving steps in a computation.
>
> 4) Let P be a set of instructions as in 1) and L be a computing agent as in 2). Then L reacts to P in such a way that, for any given input, the computation is carry out in a discrete stepwise fashion, without use of continuous methods or analogue devices.
>
> 5) L reacts to P in such a way a computation is carry forward deterministically, without resort to random methods or devices [...](Rogers, 1992, p. 2).

En lo que sigue asumiré la tesis Church-Turing: todo procedimiento mecánico (efectivamente computable, computable mediante un algoritmo) es computable por una máquina de Turing (se puede describir mediante una función recursiva). Es importante hacer hincapié en el hecho de que el *lado izquierdo* de la tesis menciona un concepto informal, no matemáticamente describible (*computabilidad efectiva*), mientras que su *lado derecho* hace referencia a un concepto estrictamente definible en términos matemáticos (*recursividad*). Por esta razón, esta tesis es matemáticamente indemostrable. De hecho, es una tesis filosófica.

La idea detrás de esta tesis es que, a partir del hecho de que para calcular una función recursiva existe un procedimiento algorítmico, se recoge la intuición de que en el sentido inverso esto también se cumple. Por otro lado, cuando se intenta formalizar la noción de *algoritmo* nos encontramos con que la tesis de Church-Turing es extremadamente útil: todo lo que pueda ser computable por un algoritmo puede ser calculado por una máquina de Turing. Por estas razones, entre otras, esta tesis es ampliamente aceptada como plausible por la literatura. Sin embargo, cabe mencionar nuevamente que el concepto *efectivamente computable* no es una noción matemática. En este sentido, las razones para aceptar o rechazar la tesis son en gran medida empíricas. Se puede argumentar a favor de esta, pero nunca vamos a poder dar con una prueba formal. En este caso, vamos a comprometernos con esta conjetura, del mismo modo que lo hace la mayoría de los lógicos, sin tener más fundamento que uno intuitivo.

No obstante, podemos mencionar entre otras motivaciones para aceptar esta tesis el hecho de que diferentes herramientas matemáticas propuestas, entre otras cosas, para capturar la noción de computabilidad efectiva resultan matemáticamente equivalentes (como las máquinas de Turing y las funciones recursivas). Para lograr convencer plausiblemente sobre la falsedad de la tesis es necesario mostrar una función calculable mediante un algoritmo o un procedimiento efectivamente computable, que no sea computable por una máquina de Turing. Cabe destacar que Alan Turing, Alonzo Church y otros, de manera independiente, trabajaron estos problemas entre 1930 y 1940. El hecho de que hasta la fecha no haya sido encontrado un contraejemplo, también puede tomarse como una razón empírica para aceptar la tesis. Teniendo en cuenta estos argumentos, los detractores de la tesis Church-Turing son los que tienen la carga de la prueba en el estado de cosas actual.

Por lo antedicho, al suponer la tesis Church-Turing, desde el punto de vista matemático nuestra caracterización técnica de aritmética debería contener la noción de recursividad. Esto es, debido a que la actividad de sumar es una tarea efectivamente

ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

computable, cuando la representamos mediante una función, debido a la tesis Church-Turing, la función debería ser recursiva (o equivalentemente, Turing-computable) y, como hemos mencionado en virtud del Teorema de Tennenbaum, sólo el modelo estándar de la aritmética caracteriza de manera recursiva sus operaciones.

Recapitulando, entonces, lo que hemos explicitado es que, desde el punto de vista meramente técnico, imponer recursividad a las operaciones de los modelos permite seleccionar unívocamente al modelo estándar de la aritmética. Luego, nos hemos preguntado si este es un criterio *ad hoc*. Así hemos llegado al siguiente argumento:

a) Tenemos la intención de capturar el concepto informal de suma

b) Luego, notamos que nuestro concepto informal de suma involucra, entre sus características intrínsecas, el concepto intuitivo de computabilidad

c) Debido a la tesis de Church-Turing, creemos que existe una identificación entre la noción de computabilidad y la noción matemática de función recursiva

d) Cualquier función que intente representar formalmente el procedimiento informal de suma debe ser recursiva

Por el teorema de Tennenbaum, sólo el modelo estándar es el modelo que asigna a la extensión de la función suma un conjunto recursivo. Luego, sólo el modelo estándar captura nuestra intuición de qué es sumar.

A su vez, es necesario notar que la caracterización que hemos hecho de la idea de procedimiento algorítmico o computabilidad involucra la noción de finitud, dado que un algoritmo es usualmente pensado como un conjunto finito de instrucciones. Asimismo, el concepto de finitud está íntimamente vinculado con el concepto de aritmética. De hecho, si pudiéramos representar la propiedad de ser finito en PA, podríamos definir la propiedad de ser un número natural y así, capturar el modelo estándar de la aritmética. Por estas razones, podemos presentar un argumento que vincula las nociones de aritmética y computabilidad:

a) Queremos capturar el modelo estándar de la aritmética

b) Por el teorema de Tennenbaum, apelamos a la recursividad como criterio de selección (en detrimento de los modelos no estándar)

c) Por la tesis de Church-Turing, el concepto técnico de recursividad se corresponde con el concepto intuitivo de computabilidad

d) El concepto intuitivo de computabilidad, pareciera involucrar entre sus notas distintivas la noción de finitud

e) La noción de finitud está fuertemente vinculada con el concepto intuitivo de aritmética

Lo que se pone de manifiesto es que al apelar a la computabilidad o a la recursividad para caracterizar a la aritmética o seleccionar el modelo estándar pareciera que estuviéramos razonando circularmente. Sin embargo, considero que la circularidad no es un problema *per se*. Simplemente, lo que intento mostrar es que existe una profunda imbricación conceptual, tanto en el plano técnico como en el filosófico, entre las nociones de aritmética y computabilidad. Hasta tal punto están vinculadas estas que una caracterización de cada una de ellas involucra necesariamente a la otra. Por esta razón, la circularidad del razonamiento no hace más que echar luz sobre esta conexión, poner de manifiesto que no es arbitrario tomar uno de los dos conceptos para caracterizar al otro.

4. Haciendo frente a algunas críticas

Hasta aquí he presentado mi postura acerca de cómo es posible capturar el modelo estándar de la aritmética utilizando la lógica de primer orden, mostrando que el criterio de selección al que se apela tiene un correlato con nuestra práctica informal. Sin embargo, dado que esta posición no es la usual, es necesario argumentar críticamente respecto de los enfoques rivales. Las posiciones respecto a la posibilidad de capturar el modelo estándar de la aritmética usualmente toman uno de los siguientes caminos: o bien, apelar a lógicas de orden superior, o bien, mantener la lógica de primer orden y utilizar otro criterio de selección. En las siguientes subsecciones, me enfocaré en argumentar por qué mi posición es superior a las posiciones rivales.

4.1 Lógica de segundo orden

Como ya es sabido, existe una corriente estructuralista en filosofía de la matemática cuyo exponente más célebre es Shapiro (1991). Su enfoque, usualmente, consiste en argumentar a favor de la utilización de lógicas de segundo orden a los fines de capturar la estructura de la aritmética. Si bien considero que el enfoque estructuralista en filosofía de la matemática es correcto, sin embargo, no lo creo incompatible necesariamente con la adopción de la lógica de primer orden. Como se ha mostrado, de hecho, es posible dar una caracterización de la estructura de la aritmética sin apelar a lenguajes de orden superior, sino imponiendo un criterio externo, justificado filosóficamente, para efectuar dicha selección eficazmente.

Las teorías de segundo orden tienen una propiedad interesante, de suma relevancia para el objeto de estudio del presente trabajo: son categóricas. Esto significa que si una teoría tiene modelo, entonces todos sus modelos son isomórficos. Como sabemos que la aritmética de Peano tiene al menos un modelo (el modelo estándar), entonces al formular dicha teoría utilizando como lógica subyacente a la lógica de segundo orden tenemos como resultado que sólo tiene al modelo estándar como modelo. Aparentemente, entonces, utilizar recursos de orden superior dirimiría la cuestión acerca de cómo capturar el modelo estándar de la aritmética.

Entre los argumentos más comunes en contra de la adopción de la lógica de segundo orden se encuentra la célebre idea de Quine (1970) respecto de que la lógica de segundo orden no es lógica, sino teoría de conjuntos encubierta. En este trabajo, no tomaré esta línea argumental. Por el contrario, lo que sostendré es un argumento de economía.

Si bien la lógica de segundo orden permite capturar el modelo estándar de la aritmética, he hecho hincapié a lo largo de estas líneas que no es una cuestión meramente técnica hacerlo. Mi posición al respecto es que debe haber una motivación independiente para cambiar de sistema lógico. La lógica de primer orden es la lógica que subyace a nuestras mejores teorías y es la usualmente utilizada a la hora de trabajar en el campo científico. Nuevamente, no se debe perder de vista que cuando Peano pensó en su teoría aritmética, una de sus motivaciones fue capturar la noción intuitiva de aritmética mediante una teoría axiomática. Creo que el intento de capturar el modelo estándar de la aritmética debería continuar en ese mismo espíritu: la manera en que capturemos ese modelo no debe ser *ad hoc.* En este sentido, considero que el cambio de lógica es una buena herramienta, pero cuyo alcance es exclusivamente técnico (no se ha motivado filosóficamente lo suficiente). Por otro lado, la discusión en torno del estructuralismo en filosofía de la matemática no inclina la balanza (Halbach y Horsten, 2005).

En otro orden, es evidente que la lógica de segundo orden, en su presentación estándar tiene mayores compromisos ontológicos que la lógica de primer orden. Si bien Boolos (1984) ha propuesto interpretaciones en términos de plurales, lo que evadiría estos compromisos, la semántica estándar de la lógica de segundo orden está fuertemente impregnada de teoría de conjuntos. La riqueza expresiva de la lógica de segundo orden se debe al alcance del dominio de los cuantificadores. Por esta razón, como menciona Barrio (en este volumen), al permitir cuantificar sobre todos los subconjuntos del dominio de un modelo, la lógica de segundo orden es incompleta (no existe una axiomatización recursivamente enumerable que capture como teoremas todas las oraciones universalmente válidas). Este es un problema técnico que la lógica de primer orden no posee. Una de las propiedades más interesantes de la lógica de primer orden es que, debido a los metateoremas de corrección y completitud, tenemos un correlato entre la semántica y la sintaxis del lenguaje: toda verdad es probable (la conversa también vale en lógica de segundo orden). Esto motiva el llamado *argumento de la metateoría inapropiada*, mencionado por Barrio (en este volumen). La práctica matemática usual está vinculada con la demostración de teoremas. Teniendo como un dato la incompletitud de la aritmética, deberíamos al menos desear que la lógica fuera un terreno más firme (siempre que quiera trazarse una línea divisoria entre lógica y matemática). El precio a pagar para ganar riqueza expresiva (utilizar una lógica incompleta y con fuertes compromisos ontológicos, como la de segundo orden) pareciera ser, no sólo demasiado alto, sino innecesario, si logramos lo mismo con una lógica más económica y completa, como la de primer orden.

Un punto relacionado con lo anterior y que resulta acuciante para la adopción de la lógica de segundo orden tiene que ver con que la semántica de la lógica de segundo orden debe tomar decisiones ajenas a la lógica, relacionadas con axiomatizaciones particulares de teoría de conjuntos. Específicamente, mientras la semántica de primer orden en su presentación en teoría de modelos adopta la teoría de conjuntos estándar (recuérdese que el dominio de interpretación se suele representar matemáticamente en forma conjuntística) existe una oración de la lógica de segundo orden cuya validez universal depende de si aceptamos la hipótesis del continuo. Como es bien sabido, la axiomatización estándar de teoría de conjuntos es ZF. La hipótesis del continuo, independiente de ZF, esquemáticamente establece que no existe un conjunto tal que su cardinal se encuentre entre el cardinal de los números naturales y el cardinal del conjunto potencia de los números naturales. Cabe destacar que esta hipótesis implica el axioma de elección, otro enunciado independiente de la teoría ZF. La plausibilidad de dichos enunciados no es el tema de controversia en este contexto. Aquí, la pregunta relevante es si la lógica debe determinarse por una axiomatización de la teoría de conjuntos. Si nos preocupáramos únicamente por aspectos técnicos, tal vez, esta cuestión podría responderse afirmativamente. Sin embargo, en pos de escudriñar los aspectos fundamentales de la aritmética, considero un error metodológico tomar decisiones sobre teoría de conjuntos. La aritmética es tal vez el aspecto más básico de la práctica matemática y, por esta razón, creo que los recursos a los que debemos apelar para describirla deben ser lo más económicos posibles.

Por último, como se ha mencionado, el estudio de los modelos no estándar de la aritmética configura un campo de estudio en sí, con interesantes resultados y aplicaciones, tanto para la filosofía de la matemática como para las teorías aritméticas. Quienes defienden la lógica de segundo orden tienen dos opciones: o bien abandonar el estudio de los modelos no estándar, o bien utilizar dos lógicas simultáneamente para temas íntimamente relacionados. Creo que si, como hemos mostrado, logramos

ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

capturar el modelo estándar de la aritmética sin cambiar de lógica ni abolir el estudio de los modelos no estándar, nuestra posición es ventajosa respecto de la solución de adoptar lógica de segundo orden.

4.2 Otros criterios de selección

Teniendo en cuenta lo antedicho, volvamos sobre LA. Aquí hemos puesto el foco en las operaciones definidas en el modelo estándar, en particular en su carácter recursivo. Sin embargo, existen otras notas distintivas del modelo estándar, respecto de los modelos no estándar, que involucran la relación de orden y la ontología de los objetos del dominio de interpretación.

Comencemos con la relación de orden. El modelo estándar de la aritmética se caracteriza por poseer una relación de orden peculiar: el orden ω. Entre otros, Benacerraf (1996) propuso considerar esta característica para seleccionar el modelo estándar de la aritmética.

Así, la restricción está puesta en el tipo de orden de los modelos. Los modelos no estándar tienen un bloque inicial de ese orden, pero luego tienen una estructura mucho más compleja: un conjunto denso de bloques entre los cuales se tiene una relación de orden isomórfica con la relación de orden del conjunto de pares ordenados de números enteros y números racionales (ℤxℚ). A continuación se ilustra esta situación:

$$\underbrace{(0,1,\ldots\ldots\ldots)\ldots}_{N} \; + \; \underbrace{(\ldots a\ldots)\ldots(\ldots b\ldots)\ldots(\ldots c\ldots)\ldots}_{Z\,x\,Q}$$

Si bien esta estrategia dejaría de lado a los modelos no isomórficos al modelo estándar, el concepto de ω-secuencia está definido en teoría de conjuntos. Esto es problemático ya que también hay modelos no estándar en teoría de conjuntos, por lo que al desplazar a los modelos no estándar de la aritmética estamos corriendo la discusión hacia los fundamentos de la teoría de conjuntos. A su vez, para definir la compleja relación de orden en los modelos no estándar hemos hecho uso de la aritmética de ordinales. Esta posición no sería económica para los fines que estamos tratando, es decir, en el afán de seleccionar el modelo estándar de la aritmética debemos comprometernos con una determinada teoría de conjuntos, ya que consideramos a la aritmética como una actividad más básica, más fundamental. Por esta razón, no consideramos viable este camino.[1]

1. Para ver otras críticas a esta estrategia puede consultarse Halbach y Horsten (2005).

La otra posibilidad mencionada para seleccionar al modelo estándar de la aritmética consiste en centrarnos en el tipo de objetos que forman parte del dominio de interpretación, es decir, en la ontología del dominio de interpretación.

En su famoso artículo, Benacerraf (1965) argumenta que la cuestión acerca de qué son los números es una pregunta sin sentido. En rigor, la matemática trata acerca de estructuras y no sobre objetos individuales. Desde un punto de vista sustancial, no es necesario comprometerse con la tesis que afirma que los números no son conjuntos, ni que los conjuntos son números. La aritmética no trata sobre números: hay una estructura singular, que debemos caracterizar con precisión, y que consiste en relaciones y operaciones entre elementos. Cualquier estructura que cumpla con tales requerimientos es la aritmética.[2] Esta esquemática caracterización ilustra la posición estructuralista. Como tesis filosófica, el estructuralismo puede oponerse a otras posiciones, tales como el platonismo y el reduccionismo.[3]

2. McLarty (1993) refiere a las tesis de Benacerraf y la relación entre números y conjuntos. Si bien lo hace desde una perspectiva diferente a la del presente trabajo, allí motiva y subraya la conexión existente entre la recursividad y la aritmética.

3. Esta caracterización no intenta ser exhaustiva, sino sólo mencionar las propuestas que consideramos más relevantes.

ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

El *platonismo matemático*, en este contexto, puede resumirse como un conjunto de tesis sustanciales acerca de los números naturales. Un platónico afirma fundamentalmente que los números naturales son objetos, de la misma manera que cualquier objeto físico, material, sólo que los números son abstractos y eternos. Asimismo, existe una tesis de independencia entre los números: cada número es independiente de los demás. Así, pareciera haber un compromiso, por parte del platonismo, con la esencia de cada número (en tanto objeto) y sus esfuerzos se dirigen a elucidar la esencia de cada número independientemente de la esencia de los demás. Puestas estas ideas en estos términos pueden parecer un poco abstractas. Sin embargo, no es posible en este trabajo ir más allá en esta dirección.[4] El platonismo es una posición muy poco económica: deberíamos comprometernos con infinitos objetos, cada uno esencialmente distinto de los demás. Baste esto para sostener que en una posición estructuralista, no es necesario comprometerse con la existencia de números, en tanto objetos con el mismo estatus ontológico que los objetos físicos. De hecho, Benacerraf (1965), entre otras cosas, argumenta la irreductibilidad de los números a objetos. Todavía más acuciante es el hecho de la existencia de los números no estándar. Una posición platónica consecuente debería comprometerse aun con la existencia, en sentido fuerte, de los números no estándar.

4. Para ver un detalle de las posiciones del platonismo matemático, puede consultarse Linnebo (2013).

Por otro lado, existen quienes se proponen reducir los números naturales a conjuntos. Benacerraf (1965, p. 278) argumenta asimismo a favor de la irreductibilidad de números a conjuntos. La crítica más importante a esta postura se basa en el hecho de que si redujéramos los números a conjuntos, deberíamos especificar a qué tipo de conjuntos. Cabe ser destacado que el reduccionismo, desde esta perspectiva, debe tomar una decisión arbitraria y comprometerse con un tipo de entidades: qué tipo de conjuntos son los números. La discusión en este caso se desplaza a pensar qué son los conjuntos. De la misma forma que sucedía en el platonismo, contrapuesta al estructuralismo, el reduccionismo es una posición filosófica poco económica.

Por estas razones, la estrategia de intentar ubicar en el tipo de entidades que forma parte del dominio de interpretación la clave para emprender una demarcación es poco económica. En su lugar, sostenemos una posición estructuralista, sin comprometernos con entidades en particular, tales como números, sino con una estructura determinada: la estructura de la aritmética.

5. Conclusión

A lo largo de estas líneas he intentado mostrar que es posible caracterizar con precisión el modelo estándar de la aritmética sin apelar a teorías con mayor poder expresivo, ni a cambios de lógica no suficientemente motivados. Para ello, la clave de mi argumentación ha residido en exponer que la recursividad o la computabilidad mantienen un estrecho vínculo conceptual con la aritmética, tanto en el plano técnico como en el plano informal. Por estas razones, sería poco económico intentar buscar una salida a estos problemas desde una perspectiva rival a la aquí sostenida.

Bibliografía

» Barrio, E. (esta compilación). “Lógica de Segundo Orden y el Modelo Estándar de la Aritmética”.

» Benacerraf, P. (1965). “What numbers could not be . *Philosophical Review,* 74, pp. 47-73

» ——— (1996). “Recantation or Any old ω-sequence would do after all”. *Philosophia Mathematica*, 4, pp. 184-189.

» Boolos (1984). “To be is to be the value of a Variable (or to be some values of some variables)”. *J. of Philosophy,* 81, pp. 430-449.

» Boolos, G., Burgess, J., and Jeffrey, R. (2007). *Computability and Logic*. Cambridge, Cambridge University Press.

» Copeland, B. (2015). “The Church-Turing Thesis”. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.). En línea: <http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/church-turing/>

» Halbach, V. y Horsten, L., (2005). “Computational Structuralism”. *Philosophia Mathematica*, 13, pp. 174-186.

» Kaye R. (1991). *Models of Peano Arithmetic*. Oxford, Oxford University Press.

» Kossac, R. y Schmerl, J. H. (2006). *The Structure of Models of Peano Arithmetic*. Oxford, Clarendon Press.

» Linnebo, Ø. (2013). “Platonism in the Philosophy of Mathematics”. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.). En línea: <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/platonism-mathematics/>.

» McLarty, C. (1993). “Numbers can be just what they have to”. *Noûs*, pp. 487-498.

» Quine (1970). *Philosophy of Logic*. 2nd Edition. Oxford, Oxford University Press.

» Rogers Jr., H. (1992). *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. Cambridge, MIT Press.

» Shapiro S. (1991). *Foundations without foundationalism: A case for Second-order Logic*. Oxford, Oxford University Press.

» Tait, W. W. (1981): “Finitism”. *The Journal of Philosophy*, pp. 524-546.

» Tennenbaum, S. (1959). “Non-archimedian models for arithmetic”. *Notices of the American Mathematical Society,* 6, p. 270.